

Een driehoek draaiend over een cirkel

6 maximumscore 7

- $y = ax$ invullen in $(x-1)^2 + y^2 = 1$ geeft $(x-1)^2 + a^2x^2 = 1$ 1
- Herleiden tot $(a^2 + 1)x^2 - 2x = 0$ 1
- (Dit geeft $x = 0$ of $x = \frac{2}{a^2 + 1}$ dus geldt) $x_S = \frac{2}{a^2 + 1}$ 1
- $y_S = \frac{2a}{a^2 + 1}$ 1
- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SP}$ 1
- $\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} \frac{2a}{a^2 + 1} \\ -\frac{2}{a^2 + 1} \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \frac{2}{a^2 + 1} \\ \frac{2a}{a^2 + 1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2a}{a^2 + 1} \\ -\frac{2}{a^2 + 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2a+2}{a^2 + 1} \\ \frac{2a-2}{a^2 + 1} \end{pmatrix}$ (en dus $x_P = \frac{2a+2}{a^2 + 1}$ en $y_P = \frac{2a-2}{a^2 + 1}$) 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

7 maximumscore 5

- De cirkel snijdt de x -as voor $a=1$ in $P(2, 0)$ en de y -as voor $a=-1$ in $P(0, -2)$ 1
- De middelloodlijnen van OP zijn in deze gevallen de lijnen met vergelijking $x=1$ en $y=-1$ 1
- Het middelpunt van de cirkel is (het snijpunt van de middelloodlijnen, dus) $(1, -1)$ 1
- Dit punt heeft afstand $\sqrt{2}$ tot $O(0, 0)$ (of P) (dus de straal is $\sqrt{2}$) 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 1

of

- De cirkel snijdt de x -as voor $a=1$ in $P(2, 0)$ en de y -as voor $a=-1$ in $P(0, -2)$ 1
- De cirkel gaat door O dus is (wegens Thales) het lijnstuk tussen $(2, 0)$ en $(0, -2)$ de middellijn van de cirkel 1
- Het punt $(1, -1)$ ligt midden tussen deze punten en is het middelpunt van de cirkel 1
- Invullen van de coördinaten van $O(0, 0)$ (of P) in $(x-1)^2 + (y+1)^2 = r^2$ 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 1

of

- $O(0, 0)$ ligt op de cirkel; bijvoorbeeld invullen van $a=1$ respectievelijk $a=-1$ geeft dat $(2, 0)$ en $(0, -2)$ op de cirkel liggen 1
- Voor de coördinaten van het middelpunt M geldt dus $x_M^2 + y_M^2 = r^2$, $(2-x_M)^2 + y_M^2 = r^2$ en $x_M^2 + (y_M+2)^2 = r^2$ (waarbij r de straal van de cirkel is) 1
- Combinatie van $x_M^2 + y_M^2 = r^2$ en $(2-x_M)^2 + y_M^2 = r^2$ geeft $x_M = 1$ 1
- Combinatie van $x_M^2 + y_M^2 = r^2$ en $x_M^2 + (y_M+2)^2 = r^2$ geeft $y_M = -1$ 1
- Invullen van bijvoorbeeld $O(0, 0)$ in de vergelijking $(x-1)^2 + (y+1)^2 = r^2$ geeft $r^2 = 2$, dus een vergelijking van de cirkel is $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$ 1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

8 maximumscore 5

- $x'_p = \frac{2(a^2 + 1) - (2a + 2) \cdot 2a}{(a^2 + 1)^2}$ 2

- $x'_p = 0$ geeft $-2a^2 - 4a + 2 = 0$ 1

- Een berekening waaruit volgt dat $a = -1 \pm \sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

- Een toelichting waaruit blijkt dat x_p maximaal is als $a = -1 + \sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Als x_p maximaal is, dan ligt P op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 1

- Er geldt dus $\frac{2a - 2}{a^2 + 1} = -1$ 1

- Hieruit volgt $a^2 + 2a - 1 = 0$ 1

- Een berekening waaruit volgt dat $a = -1 \pm \sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

- Een toelichting waaruit blijkt dat x_p maximaal is als $a = -1 + \sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1

of

- Als x_p maximaal is, dan ligt P rechts van het middelpunt van de cirkel op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 1

- Er geldt dus $\frac{2a + 2}{a^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$ 1

- Herleiden geeft $(1 + \sqrt{2})a^2 - 2a + \sqrt{2} - 1 = 0$ 1

- Een berekening waaruit volgt dat $a = -1 + \sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2

of

- Als x_p maximaal is, dan ligt P rechts van het middelpunt van de cirkel op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 1

- Er geldt (omdat $\angle OSP = 90^\circ$) dus $\left(\frac{2}{a^2 + 1}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{2} - \frac{2}{a^2 + 1}\right) = 0$ 1

- $\frac{2}{a^2 + 1} \cdot \left(1 + \sqrt{2} - \frac{2}{a^2 + 1}\right) + \frac{2a}{a^2 + 1} \cdot \left(-1 - \frac{2a}{a^2 + 1}\right) = 0$ 1

- Een berekening waaruit volgt dat $a = -1 + \sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> Als x_p maximaal is, dan ligt P rechts van het middelpunt van de cirkel op dezelfde hoogte als het middelpunt van de cirkel 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Een vergelijking van de lijn door S loodrecht op lijn OS is $y - \frac{2a}{a^2 + 1} = -\frac{1}{a} \left(x - \frac{2}{a^2 + 1} \right)$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Er geldt dus $-1 - \frac{2a}{a^2 + 1} = -\frac{1}{a} \left(1 + \sqrt{2} - \frac{2}{a^2 + 1} \right)$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> Een berekening waaruit volgt dat $a = -1 + \sqrt{2}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 	2